A 39. ORTVAY RUDOLF
FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI
2008

Az ELTE TTK Fizikus Diákköre, a Magyar Fizikus Hallgatók Egyesülete és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2008-ben is meghirdeti a hagyományos, immár 39-ik, ezúttal már tizenegyedszer nemzetközi Ortvay Rudolf Fizikai Feladatmegoldó Versenyt. Időpont: 2008. október 22 – november 3.

Az Ortvay versenyen minden – hazai és külföldi – egyetemi hallgató indulhat. Az értékelés és a díjazás évfolyamonként történik. A doktoranduszok külön kategóriát alkotnak. A verseny egyéni: páros vagy csoportosan írt dolgozatokat nem fogadunk el. Kérjük a beadott feladatokon megadni a versenyző egyetemét, szakát és évfolyamát. Álnév vagy jelszó nem használható, minden versenyző valódi néven indul.

A feladatok **2008. október 22-én, szerdán, közép-európai idő szerint 12 órától (10:00 GMT)** magyar és angol nyelven, html, LaTeX, pdf és Postscript formátumban **letölthetők** az Ortvay-verseny weblapjáról:

http://ortvay.elte.hu/

Budapesten emellett a feladatok – ugyanettől az időponttól – nyomtatott formában is átvehetők az ELTE lágymányosi Fizika–Kémia tömbjének (H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A) földszinti társalgójában. A lágymányosi Mafihe irodában (2.106 szoba) a későbbiekben egy mesterpéldány áll a fénymásolni kivánók rendelkezésére.

A BME-n, a JATE-n, a KLTE-n, a JPTE-n és számos külföldi egyetemen helyi szervezők intézik a feladatok sokszorosítását és kiosztását.

Figyelem! A szervezők minden igyekezete ellenére is előfordulhat, hogy egy-egy értelemzavaró fogalmazási vagy gépelési hiba marad a feladatok szövegében. Érdemes ezért a továbbiakban is figyelni a fenti weblapot, illetve a lágymányosi Mafihe hirdetőtáblát, ahol az esetleges javításokat, módosításokat azonnal közzétesszük.

Egy versenyző maximálisan 10 feladat megoldását adhatja be. Minden feladat megoldása maximálisan 100 pontot ér.

A feladatok megoldásához *bármilyen segédeszköz használható.* Könyvre, folyóiratcikkre hivatkozni lehet.

Minden feladat megoldását külön A4-es lap(ok)ra kérjük leírni. Egy lapnak csak az egyik oldalára írjunk vagy nyomtassunk! Ne írjunk ceruzával vagy vékony másolópapírra – ezeket nem tudjuk elfaxolni a megoldások javítóinak. Az ilyen dolgozatokat nem fogadjuk el.

Ha a megoldáshoz számítógépes program is tartozik, kérjük írásban megadni a program részletes dokumentációját (milyen nyelven íródott, hogyan lehet elindítani, milyen paramétereket lehet beállítani, melyik betű mit jelent, hogyan kell a program készítette ábrákat vagy táblázatokat értelmezni, stb.) A programokat e-mailen lehet elküldeni az alább megadott címre.

A megoldásokat személyesen, postán, faxon vagy e-mailen (TeX, LaTeX PDF vagy Postscript formátumban) lehet beküldeni. Kérjük a versenyzőket, hogy csak az alapvető LaTeX stílusfájlokat használják, vagy a felhasznált speciális stílusfájlokat mellékeljék a beadott anyaghoz. Az elektronikusan beadott dolgozatokhoz – külön e-mailben – kérjük csatolni a tartalomjegyzéket és az esetleges kibontási útmutatót.

Személyesen a lágymányosi Északi tömbben, a Mafihe Irodában (2.106 szoba) lehet a megoldásokat leadni.

Postacím: ELTE TTK Fizikus Diákkör, Dávid Gyula, ELTE TTK Atomfizika Tanszék
H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A
Faxszám: Dávid Gyula, 36/1/3722753 vagy Cserti József, 36/1/3722866
E-mail cím: dgy@elte.hu

Beadási határidő: 2008. november 3. hétfő, közép-európai idő szerint 12 óra (11:00 GMT).

Kérjük, hogy a feladatok valamilyen formában történt postázása után minden versenyző töltse ki a verseny weblapjáról nyíló adatlapot. Ez a versenyzők és beadott megoldásaik azonosítására szolgál. **Figyelem! Az adatlap kitöltése nélkül a zsűri nem tudja elfogadni a beküldött megoldásokat! Az adatlap csak november 2-től 4-ig lesz elérhető, kérjük mielőbb kitölteni!**

A verseny díjazása évfolyamonként történik, az összpontszám alapján. A zsűri fenntartja a jogot, hogy egyes díjakat ne, megosztva vagy több példányban adjon ki. A pénzjutalommal járó 1., 2. és 3. díjak mellett dicséretek, illetve egyes feladatok kiváló megoldásáért különdíjak is odaítélhetők. Ezért már egy-két feladat megoldását is érdemes beadni!

A verseny eredményhirdetése december 6-án lesz, a hagyományos Fizikus Mikulással egybekötve. A pontos helyszínt később közöljük a verseny weblapján. Az ünnepélyes eredményhirdetést a feladatok megoldásának megvitatása követi. Az egyes feladatok legjobb megoldóit ezennel előre felkérjük, hogy ismertessék megoldásaikat. (A verseny egész Földre kiterjedt volta ellenére ez a felkérés értelemszerűen csak a hazai versenyzőkre vonatkozik.) A részletes eredmény ezután megtekinthető lesz a verseny weblapján. A díjazott versenyzőket e-mailben értesítjük, az okleveleket és a pénzjutalmakat az eredményhirdetésen nyújtjuk át, illetve külföldre postán küldjük el.

Sikeres versenyzést, tartalmas és hasznos fejtörést kívánunk minden versenyzőnek!

A verseny szervezői: Dávid Gyula, Cserti József
A feladatok fordítója: Varga Dezső

1. **(Szigorúan titkos! Lehallgatott rádióbeszélgetés. CIA 1969/07/20/42/137)**

– Nézd csak, ott balra, mindjárt a fékezőrakéta mögött, mi az?
– Hát ezt nem hiszem el! Egy fekete dominó, obeliszk, vagy mifene... Pont, mint a 2001 Űrodisszeában. Csak rá van festve egy hatalmas vigyorgó smiley... Álljunk meg azonnal!
– Lehet, hogy te vagy a parancsnok, de még mindig nem értesz az égimechanikához. Itt nem lehet csak úgy egyszerűen megállni. Ha nem tudnád, éppen úton vagyunk a Nyugalom tengere felé, és ha most csak egy kicsit is fékezünk, sosem érünk oda, sőt le is zuhanhatunk. Az űrben meg amúgy sem lehet állni, minden mozog...
– Akkor ez a fekete izé hogyan és miért áll ott?
– Az sem áll. Közben bemértem, körpályán kering a Hold felett, épp 137 km magasan.
– Akkor álljunk mi is körpályára, melléje!
– Ahhoz nincs elég üzemanyagunk, és különben is, akkor fel kellene adnunk a holdraszálást. Majd visszafelé! A holdkomp felszállóegységében van egy kis tartalék kakaó, azzal melléállhatunk.
– OK, akkor visszafelé radarral megkeressük.
– Van egy rossz hírem. Ezt az izét nem érzékeli a radar. Mondhatni lopakodva kering a Hold körül. Az előbb is csak azért vettük észre, mert ez a fekete négyszög kitakart egy részt a Hold megvilágított felszínéből. Alulról nem is láttuk volna a fekete ég előtt.
– Hoppá! Akkor visszafelé jövet hogyan vesszük észre? Tudod mit? Tegyünk ki mellé egy rádióbóját!
– Ilyesmivel egyelőre még nem szerelik fel az űrhajókat.
– Kár, minden sci-fiben így oldják meg a hasonló helyzeteket. Nincs valamink, amivel pótolhatnánk?
– Hát, elhoztam magammal a kisfiam cserkésztáborokban használt rúdlámpáját. Elem is van hozzá. Méghozzá szuperelem, akár egy hétig is kitart. Állítólag tíz wattos fénysugarat produkál... Ha a lámpát óvatosan kitesszük az űrbe, megfelelő sebességgel meglökjük, akkor talán sikerül ráállítani ugyanarra a körpályára, amin ez az izé kering. Próbáld meg úgy kitenni, hogy folyamatosan rávilágítson a fekete valamire. Akkor a radarral megtalálhatjuk a lámpát, a fénye alapján meg az UFO-t. No, akkor hajolj ki, célozd meg azt a fényes csillagot... nem azt, a mellette levőt... és dobj akkorát, mint egy baseball meccsen... Remek!
– Akkor sikerült?
– Majdnem. Az irányt és a pályát eltaláltad, a lámpa kb. száz lábnyira lebeg az izétől, de sajnos forogni kezdett, és csak minden harmadik másodpercben világít rá a négyszögre. De így talán még jobb, feltűnőbb lesz, ha keressük.
– Milyen furcsán forog...
– Hát igen, ha nem a főtengelye körül, hanem arra 45 fokos szögben álló tengely körül hozod forgásba, akkor ilyesmi várható. Még jó, hogy a forgástengely pont az izé felé irányul. No jó, ülj vissza a vezérlőpulthoz, folytassuk a leszállást. Két nap múlva visszajövünk, és közelebbről megnézzük, mi ez a valami. Akkor Holdra fel! Izé, le!

(Rögzítés vége.)

Az elemzőtiszt kommentárja: tény, hogy a navigátor kisfia visszakapta az elemlámpáját, évekig büszkén mutogatta az iskolában. Az is tény, hogy a holdkomp a visszaúton gyanúsan sokáig vesztegelt, és furcsa manővereket végzett 137 km magasságban. A fekete izéről azonban a továbbiakban sem a beszélgetésekben, sem a hivatalos jelentésekben nem esett szó.

Értékelés: amennyiben a fenti beszélgetés nem az esetleges lehallgatók megtévesztésére szolgált, és valós eseményeket rögzít, akkor csak arra tudunk gondolni, hogy a kihelyezett zseblámpát valami ismeretlen fizikai hatás letérítette kijelölt pályájáról, és bár a visszatérő komp utasai a lámpát megtalálták, az már nem a „fekete izé” közelében tartózkodott.

Javasolt intézkedések: szigorúan titkos kutatások indítása az ismeretlen fizikai jelenség feltárása céljából. Ki kell derítenünk, milyen hatás, és milyen messzire sodorta a zseblámpát eredeti helyzetétől. Javasoljuk (az I. Asimov nevű ügynökünk által az „Aranytojás” projektben felvetett ötlet alapján) jelen dokumentum kiszivárogtatását egy nemzetközi fizikaverseny feladata formájában, hátha a fizikushallgatók egyesített intelligenciája segít megfejteni a rejtélyt. Emellett természetesen folytatni kell a titokzatos objektum utáni közvetlen kutatást is „Tű a szalmakazalban” fedőnév alatt.

Intézkedési terv jóváhagyva, a kiszivárogtatás 39 évvel elhalasztva.

Titkosítva 2106. június 20-ig.

(Cserti József, Dávid Gyula)

2. A Nemzetközi Űrállomás időnként a Vénusz fényességét megközelítő fénnyel halad át égboltunkon. Ezeket a megfigyelési időpontokat előre jelzik a `http://www.heavens-above.com` című honlapon. (A „select from map or from database or edit manually” menüpontokban 100 m pontossággal megadhatjuk a megfigyelés helyét, utána kattintsunk az 'ISS' linkre!) Ha a 'Prev' ill. Next' linkekkel haladunk az időben, akkor azt láthatjuk, hogy egy adott hosszúságú időszakban megfigyelhető átvonulások száma erősen ingadozik. Mi okozza ezt az ingadozást, és pontosan milyen módon változik, ha a légkör fékező hatását és az ezt ellentételező hajtómű-bekapcsolás hatását elhanyagoljuk?

(Kaufmann Zoltán)

3. Gipsz Jakab lusta fizikushallgató egy hosszú, egyenes, 10 méter széles úttesten akar gyalog átkelni. Úticélja az út másik oldalán van, az út mentén, nagyon messzire a kiindulási ponttól. Jakab lusta: úgy érzi, hogy ha a KRESZ szerint, merőlegesen menne át az úton, akkor a lehetséges legrövidebbnél jóval hosszabb utat járna be, és ezzel felesleges kitérőt tenne. Szeretne rövidebben a céljához érni. Viszont Jakab óvatos is: azt sem akarja, hogy az úttesten elüsse egy autó. Jakab az út egy akkora darabjat látja jól be (az úttest bármely pontjából), amekkorát egy autó 10 másodperc alatt tesz meg. Gyalog $1\,m/s$ sebességgel tud mozogni. Tehát ha induláskor körülnéz, és nem lát közeledő autót, 10 másodperc alatt végig merőleges irányban mozogva biztonságosan átérne a túloldalra. Kocsi sehol, hát el is indul – de hamar észreveszi, hogy most már felesleges merőlegesen folytatnia az utat, hiszen egy kicsit a célja fele kanyarodva, ferdén is átérhet az úttest hátralevő részén a kritikus 10 s alatt. Autó még mindig nincs a láthatáron, ezért Jakab később még jobban és jobban bekanyarodik a célja felé, mindig pontosan annyira, hogy ha bármelyik pillanatban meglátna egy kocsit közeledni, akkor a pillanatnyi irányát tartva, egyenesen továbbhaladva, 10 s alatt éppen átérhetne a túloldalra. Azonban egyáltalán nincs forgalom, és egyetlen autó sem téved arra Jakab egész kalandja során. Ő tehát egy jól definiált görbe vonalon halad, és végül – sok idő múlva – eléri célját. Hány másodpercet takarított meg Jakab így ahhoz képest, mintha merőlegesen ment volna át az úton?

(Veres Gábor)

4. Egy cirkuszi egyensúlyozóművész egy hosszú függőleges rúdra akar felmászni. A rúd hossza ℓ, tömege m. A produkció kezdetekor a rudat az egyik végéhez erősített, elhanyagolható súlyú rugalmas kötélen engedik le a cirkusz kupolájából. Amikor a rúd alja éppen a talajhoz ér, a kötél 2ℓ hosszú. A kötél nyújtatlan hossza ℓ, megnyúlása közben jól követi a Hooke-törvényt.

a) Milyen magasra mászhat fel a rúdra az ugyancsak m tömegű artista anélkül, hogy a rúd függőleges egyensúlyi helyzete instabillá válna? (Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy az artista mérete ℓ-hez képest elhanyagolható.)

b) A rúd fele magasságánál az artista kicsit kibillen és a rúddal együtt oldalirányú lengésekbe kezd. Mekkora a lengés T periódusideje?

c) A produkciót egy forgószinpadon is megismétlik. A rúd a színpad forgástengelyében helyezkedik el, és a rugalmas kötél is a színpaddal együtt forog. Milyen magasra mászhat fel az artista a rúdra, ha a forgás periódusideje az előző kérdésben szereplő T háromszorosa?

(Balogh Péter)

5. Azt szokták mondani, hogy a mozgó kerékpár stabilizálásához jelentősen hozzájárul az első kerék perdületének megmaradásából következő pörgettyűhatás. (Aki már tartott a kezében tengelyénél fogva egy pörgő biciklikereket, és megpróbálta elfordítani a tengelyt, tanusíthatja, hogy milyen jelentős erők lépnek fel.) Küszöböljük ki ezt a hatást a következő módon: hosszabbítsuk meg a kerékpár első tengelyét, és mindkét oldalra szereljünk fel egy-egy további, az eredeti kerékhez hasonlóan golyóscsapágyokon szabadon forgó „pótkereket". Ezekről a pótkerekekről előzetesen szereljük le a gumikat, így átmérőjük kisebb lesz, és mozgás közben nem érnek a talajhoz. Az abroncsra tekerjünk vastag fémdrótot, ezzel pótolva a leszerelt gumi tehetetlenségi nyomatékát.

Most üljünk fel a biciklire, induljunk el egy egyenes úton, majd óvatosan előrenyúlva pörgessük fel a „pótkerekeket" az úton gördülő kerekekkel ellentétes irányba. Ha ügyesen csináljuk, a visszafele forgó pótkerekek perdülete éppen kiegyenlíti a gördülő kerékét, így az eredő perdület nulla lesz. Pörgettyűnyomaték ekkor egyáltalán nem léphet fel. Próbáljuk kormányozni a biciklit! Könnyebben vagy nehezebben megy, esetleg egyáltalán nem sikerül, és elesünk? Pörgessük még nagyobb szögsebességgel visszafele a „pótkerekeket"! Ekkor az eredő perdület és így a pörgettyűnyomaték a megszokottal ellentétes irányú lesz. Sikerül-e most kormányozni a biciklit? Magyarázzuk meg a tapasztaltakat!

(Ha nincs időnk vagy szakképesítésünk megépíteni a pótkerekekkel felszerelt kerékpárt, puszta elméleti okoskodással is megoldhatjuk a feladatot.)

(Csabai István, Dávid Gyula)

6. Tekintsük a $V(x) = \frac{1}{2}x^2 + \lambda x^n$ potenciálban mozgó egységnyi tömegű részecske rezgéseit (az egyszerűség kedvéért n legyen egész)! A rezgésidő az A amplitudó és a λ paraméter függvényében a $T = 2\pi f(A, \lambda)$ alakba írható, ahol $f(A, 0) = 1$, és $\lim\limits_{A\to 0} f(A, \lambda) = 1$.

a) Lássuk be, hogy az f függvény csak az A és λ mennyiségek egy alkalmasan választott kombinációjától függ! Melyik lesz f Taylor-sorának első nem eltűnő korrekciós tagja? Vizsgáljuk külön a páros és páratlan n esetét!

b) Páros n esetében írjuk fel az első korrekciót meghatározó integrált, majd számoljuk ki az $n = 4$ és $n = 6$ eseteket!

c) Lássuk be, hogy a páratlan n-ek esete visszavezethető a párosakéra, azaz lássuk be, hogy alkalmas a-t és (páros) n'-t választva a

$$V'(x) = \frac{1}{2}x^2 + a\lambda^2 x^{n'}$$

potenciál ugyanazt a korrekciót adja, mint $V(x)$! (*Útmutatás:* Landau: Elméleti fizika I. Mechanika 12)

(Pozsgay Balázs)

7. Egy r sugarú kör mentén három elhanyagolható tömegű ($m = 0$) bogár mászkál. A bogarakra ható súrlódási erő arányos a sebességükkel, az együtthatót jelölje γ. A bogarak időben állandó erővel hajtják magukat, így ha nem zavarják őket, akkor sebességeik állandóak. Ezek a sebességek egy számtani sorozat egymás utáni tagjait adják. Mi azonban megzavarjuk a bogarakat: D rugóállandójú, a Hooke-törvénynek engedelmeskedő rugókkal kötjük össze őket páronként a kör húrjai mentén. A rugók nyújtatlan hossza nulla, tömegük nincs. Vizsgáljuk a bogarak mozgását elegendően hosszú idő eltelte után (a bogarak továbbra is csak a kör mentén mozoghatnak)! (Figyelem: elméleti feladat, ne kísérletezzünk állatokkal!)

(Maródi Máté)

8. Hányszor nagyobb egy A felületű, l magasságú és E Young-modulusú hasáb benyomódása ahhoz képest, ha egy m tömegű és ugyancsak A felületű testet nem csak ráhelyezünk a hasábra, hanem h magasságból ráejtjük? Mit mondhatunk, hogy ha figyelembe vesszük a hasáb E Young-modulusán kívül a σ Poisson-számot is?

(Cserti József)

9. Két egyforma méretű, R sugarú és L hosszúságú hengert végükön összehegesztünk, így egy $2L$ hosszúságú hengert kapunk. Az egyik henger vasból, a másik rézből van. Milyen frekvenciájú rugalmas állóhullám-módusok alakulhatnak ki a rendszerben?

(Cserti József)

10. Adjunk becslést, hogy egyes antropikus hatások (bányászat, építkezések, népesség-növekedés, víztározók feltöltése, valamint számos olyan hatás, amikre a feladat kitűzője nem gondolt, de a megoldóknak eszükbe jutott) eredményeképpen külön-külön és összességében hány másodperccel változott egy nap hossza a Földön Newton születése óta!

(Hetényi György)

11. Egy párhuzamos síkokkal határolt D vastagságú fémlemez mindkét oldalról félvégtelen rugalmas anyagtömbbe van beágyazva. A lemezre a síkjára merőleges irányból rugalmas hullám érkezik. Mi a feltétele annak, hogy a réteg transzmissziója a hullám longitudinális és transzverzális összetevőjére nézve azonos legyen?

(Cserti József, Dávid Gyula)

12. Egy hangforrás P teljesítménnyel gömbszimmetrikusan sugároz igen alacsony f frekvenciájú, vagyis nagyon nagy $\lambda = c_{\text{hang}}/f$ hullámhosszúságú „infrahangot”.

a) Mekkora a nyomásingadozás amplitudója a hangforrástól R távolságban?

b) A hangforrástól viszonylag messze egy téglatest alakú, ϱ sűrűségű és adott méretű testet úgy függesztünk fel, hogy az lényegében szabadon el tud mozdulni bármilyen irányban. (A téglatest egyik lapja a hangforrás irányára merőlegesen helyezkedik el.) Becsüljük meg, hogy mekkora amplitúdójú kényszerrezgésbe hozható ez a test a rá eső hanghullámokkal! (Szorítkozzunk a stacionárius, állandó amplitúdójú rezgésekre!)

(Szokoly Gyula)

13. Lehallgatótermek vagy házimozi stúdiók tervezésekor problémát jelent, hogy a szoba alakjától függően bizonyos frekvenciájú hangok felerősödnek, melyek jelenléte a hangminőség romlásához vezet. A probléma kiküszöbölhető úgy, hogy inverz hangsugárzó(ka)t (hangcsapdát) helyezünk el a szoba egyes részein. Tervezzünk adott f frekvenciájú hangot csillapítani képes eszközt mindössze egy merev falú doboz és egy cső segítségével! A szoba mely részeire érdemes a csapdákat elhelyezni?

(Fejős Gergely)

14. Két különböző fém rétegeiből „szuper-szendvicset” készítünk: felváltva következnek egymás után az A fémből készült, d_A vastagságú, majd a B fémből készült d_B vastagságú (oldalirányban végtelen síknak tekinthető) rétegek. Az A fémben a longitudinális hangrezgések sebessége c_A, a B fémben c_B. Az összesen $2N + 1$ rétegből álló ($ABABA...ABABA$) szerkezetű szuperszendvicset mindkét oldalon a B fémből készült félvégtelen tömbhöz ragasztjuk. A szendvicsre a síkjára merőleges irányból longitudinális hanghullám érkezik. Számítsuk ki a hullám reflexiós és transzmissziós együtthatóját a hullámhossz függvényében!

(Cserti József, Dávid Gyula)

15. A Hortobágyon kis szöggel a horizont felett délibáb látszik. Tegyük fel, hogy a levegő n törésmutatója csak a z magasság függvénye! Milyen feltételt kell teljesítenie az $n(z)$ függvénynek ahhoz, hogy kialakulhasson a délibáb? Mikor lesz egyenes, és mikor fordított állású a kép?

(Kaufmann Zoltán)

16. Három matematikus, András, Anna és Attila a következő problémán vitatkozik: *Mennyire kell megvastagítani egy pénzérmét, hogy feldobva egyharmad valószínűséggel állapodjon meg az „élén”?* A problémát a végletekig leegyszerűsítik: szabályos, homogén hengerrel számolnak és feltételezik, hogy amint a henger eléri a talajt, mozgása azonnal leáll. Gyorsan megállapodnak, hogy így adott kezdőhelyzethez könnyedén kiszámolható a végállapot, ezért a következő kérdés megvitatására térnek át: *Milyen a henger véletlenszerű kezdőhelyzetének eloszlása?* Abban egyetértenek, hogy – az egyenlő okok elve alapján – az eloszlásnak egyenletesnek kell lennie, abban azonban ellentét alakul ki közöttük, hogy ez milyen koordinátákban teljesüljön:

    András szerint az egyetlen releváns koordináta a henger tengelyének a függőlegessel bezárt szöge, ezért azt javasolja, hogy e szög függvényében tekintsék egyenletesnek az eloszlást.

    Anna úgy véli, figyelembe kellene venni, hogy a tér három dimenziós; szerinte a henger tengelyének irányát egy egységgömbön kell értelmezni, így a legjobb lenne az eloszlást ezen egységgömbön egyenletesnek venni.

    Meghallgatva két kollégáját Attila bizonytalanul megemlíti, hogy még régen fizika előadáson hallott valamit az Euler-szögekről, amik egy test tetszőleges helyzetét egyértelműen koordinátázzák, ezért úgy gondolja, hogy a henger kezdőhelyzetének eloszlását esetleg ezen Euler-szögekben kellene egyenletesnek tekinteni.

    Határozzuk meg mindhárom esetben annak a valószínűségét, hogy a pénzérme az élén állapodik meg a magasság/sugár arány függvényében!

    Végül pedig tegyünk igazságot a matematikusok között!

    (Kómár Péter)

17. Adott n darab, látszatra teljesen megegyező, ismeretlen tömegű, nem túl nehéz golyó, melyekről tudjuk, hogy egy közülük a többitől eltérő tömegű (azt nem tudjuk, hogy könnyebb vagy nehezebb). Célunk ezt a golyót minél rövidebb idő alatt elkülöníteni a többitől. A feladathoz két eszköz áll rendelkezésünkre. Az első egy asztali táramérleg, a második pedig egy kétkarú mérleg (mindkét mérőeszköz ideális, tehát végtelenül pontosak és teherbírásuk határtalan).

    a) Az asztali táramérlegen a golyókat egymás után egyesével mérve mennyi lesz az eltérő tömegű golyó megtalálási idejének várható értéke, ha egy méréshez tartozó időtartam T? Hogyan módosul ez az időtartam $n \to \infty$ esetben?

    b) Adjuk meg $N(n)$-t, azaz a kétkarú mérleggel történő azon mérésszámok minimumát, ahány mérés segítségével már biztosan megtaláljuk a kérdéses golyót!

    c) Ha a kétkarú mérleggel történő egyetlen mérés átlagos időtartama $C \cdot T$, akkor mekkora C értéknél érdemes a kétkarú mérleget használni rögzített n mellett?

    c) Legyen $n = 40$ és $C = 51/11$! Mutassuk meg, hogy ebben az esetben a kétkarú mérleg alkalmazása előnyös számunkra, és írjuk le minden részletre kiterjedően elejétől a végéig a mérési eljárást!

    (Homa Gábor)

18. Aliz, Bea és Cili hármasikrek, és női szeszélyüknél fogva állandóan versengenek egymással: most sincs ez másképp. A játékaik persze mindig a véletlenről szólnak. Most a következő „szerencsejátékot” űzik: rendelkezésükre áll 10 pohár víz, mindegyikben azonos mennyiségű folyadék van, és a poharak is mind ugyanolyanok. Három pohárban $T_1 = 5$ °C-os, hét pohárban pedig $T_2 = 35$ °C-os víz van. A poharak összekeverve állnak egy asztalon, és ránézésre nem lehet tudni, melyikben milyen hőmérsékletű víz van. Mindhárom lány választ egy-egy poharat. Rendelkezésükre áll három darab műszakilag teljesen megegyező hűtőszekrény, azaz a víz mindegyikben $t(T_1)$, illetve $t(T_2)$ idő alatt fagy meg. A hűtés körülményei úgy alakulnak, hogy egy adott hűtőszekrényben $3 \cdot t(T_2) < 2 \cdot t(T_1)$.

    A lányok a poharakat egyszerre teszik be a hűtőkbe, és az nyer, akinek a választott poharában hamarabb megfagy a víz. Hogy holtverseny ne alakulhasson ki, két hűtőszekrényt egy-egy robotpilótával ellátott relativisztikus űrhajóba tesznek, melyek különbözőképpen vannak beprogramozva. Az Alíz és Bea által választott poharakat szállító, az adott lányról elnevezett űrhajók a poharak behelyezése és a hűtőszekrények bekapcsolása után azonnal indulnak, és azonos módon gyorsulnak: rapiditásparaméterük a földi rendszerből nézve a következőképp változik az idő függvényében: $\beta(t) = k \cdot t^{1/4}$.

    Az „Alíz” nevű űrhajó $t(T_2)/4$ ideig gyorsít, pillanatszerűen megáll, ugyanolyan gyorsulásfüggvény szerint gyorsít visszafelé, majd az indulástól számított $t(T_2)/2$ idő elteltével visszatér a Földre, és ismét pillanatszerűen megáll. A másik űrhajó, a „Bea” ugyanígy mozog, de már $t(T_2)/8$ idő múlva megáll, visszafordul, végül az indulástól számított $t(T_2)/4$ idő múlva érkezik haza. A harmadik, a Földön maradó hűtőszekrény (benne Cili poharával) is ugyanabban a pillanatban kapcsol be, amikor a két űrhajó elindul.

    Az űrhajók visszatérte után a lányok izgatottan várakoznak a víz megfagyására...

    a) Adjuk meg a verseny összes lehetséges kimenetelét és az egyes kimenetelek valószínűségeit!

    b) Milyen valószínűséggel kerül olyan hőmérsékletű víz egy adott hűtőszekrénybe, mely gyorsabban megfagy?

    c) Mennyit öregedett Alíz és Bea mintája $t(T_2)$ alatt? Az eredményt $t(T_2)$ és k függvényében adjuk meg! Milyen feltételt rójunk ki k-ra, hogy fizikailag értelmes legyen a feladat?

    d) Pótkérdés: Mi köze van a feladatnak Tanzániához? :)

    (Homa Gábor)

19. Az Interneten keresztül történő file-megosztás egy újabb módja a torrentek használata. Egy torrent egyszerre sok file (a torrentben meghatározott file-ok) szimultán ill. felváltva történő letöltését teszi lehetővé, ezért a file-ok sokáig csak részekben (használhatatlanul) állnak a rendelkezésünkre.

Racionális feltételezés, hogy a torrentet kezelő letöltőprogram lényegében véletlen sorrendben tölti a különböző file-ok egyes részeit. Ez alapján adjunk elméleti jóslatot arra, hogy egy sok egyforma méretű file-t tartalmazó torrent különböző globális elkészültségi fokaihoz a file-ok elkészültségének milyen eloszlása tartozik, más szóval határozzuk meg a file-ok elkészültség szerinti eloszlását a letöltés különböző fázisaiban! Ezután terjesszük ki a megtalált elméleti összefüggést különböző méretű file-okat tartalmazó torrentekre, és teszteljük az elméleti jóslatot úgy, hogy összehasonlítjuk az alábbi webcímen található valódi torrent letöltése során felvett mérési adatokkal!

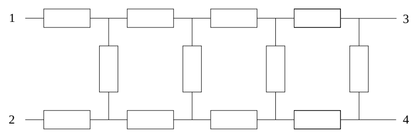
`http://pkomar.web.elte.hu/Ortvay2008.html`

(Kómár Péter)

20. Elektromosan semleges körvezetőben egyenáram folyik, ami mágneses teret kelt. A körvezető szimmetriatengelye körül forgó koordinátarendszerben ez olyan elektromos tér megjelenéséhez vezet, amely a vezető felé mutat. Eszerint a forgó koordinátarendszerben a vezetőnek elektromos töltése van. Magyarázzuk meg a jelenséget és ellenőrizzük a töltésmegmaradást!

(Bene Gyula)

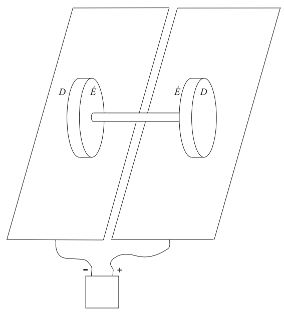
21. Készítsünk $3N$ darab egyforma R nagyságú ellenállásból egy N lépcsőfokból álló ellenálláslétrát, és helyezzük egy Möbius-szalagra! Ezt legegyszerűbben úgy képzelhetjük el (például $N = 4$ esetén), hogy az alábbi hálózat



1-es és 4-es, valamint 2-es és 3-as pontját összeforrasztjuk. Mekkora az ellenállás a hálózat két tetszőlegesen kiválasztott pontja között? Vizsgáljuk meg numerikusan a legkisebb N-ekhez (1 és 2) tartozó kifejezést!

(Széchenyi Gábor)

22. Két erős, korong alakú kerámiamágnest egy vékony vezető pálca végeihez erősítünk, majd vízszintes asztalra helyezzük el őket. Mindkét mágnes északi pólusa a tengely felöli oldalon található. A mágnesek felületét elektromosan vezető fémréteg borítja. Az asztalon két, egymástól elszigetelt vezető lemez fekszik, az egyik mágnes az egyik, a másik pedig a másik lemezzel érintkezik.



a) Ha a vezető lemezekre egyenfeszültséget kapcsolunk, a mágnesekből és a tengelyből álló rendszer gurulni kezd. Milyen irányba gurul a két tengelyezett mágnes, ha a jobb oldali lemezre kapcsoljuk a telep pozitív sarkát?

b) Elemezzük a rendszer viselkedését az impulzus- és az impulzusmomentum megmaradási tétele szempontjából!

(Juhász András)

23. Tekintsünk egy homogén elektrosztatikus térbe helyezett fémgömböt! Adjuk meg a csak a gömböt jellemző energiát, vagyis a megosztott töltések sajátenergiájának és egymás terében vett kölcsönhatási energiájának az összességét! Az előzőeket kihasználva mutassuk meg, hogy ha a felületi töltéseket valamilyen eljárás segítségével lerögzítjük, akkor egy, a gömb belsejébe helyezett dipól és a felületi töltések között fellépő kölcsönhatási energiára adódó eredmény nem egyeztethető össze az elektrosztatika alapegyenleteivel! Mit kell megváltoztatni, hogy a kapott eredmény konzisztens legyen az elektrosztatikával? Mi ennek a fizikai oka?

(Fejős Gergely)

24. Alkossuk meg a nagyenergiás részecskegyorsítók mágneses optikájának transzfer-mátrix formalizmusát! A részecskék pályáját kövessük a gyorsítás irányába. Az ebben az irányban való elmozdulás gyakorlatilag a megtett út (az ehhez az irányhoz képesti szög nagyon kicsi), tehát legyen ez a pályát leíró ívhossz-paraméter.

A pályák közül van egy speciális: ez az, amin szeretnénk hogy a részecske fusson, és fut is, ha épp jó helyről, jó irányban indítottuk. Nevezzük ezt a tervezett trajektóriának.

A részecske pályáját egyértelműen meghatározza, ha tudjuk a helyzetét és irányát a tervezett trajektória helyéhez és irányához képest: a tervezett trajektóriára merőleges síkban jelöljük a részecske helyét x-szel és y-nal (vízszintes és függőleges). A tervezett trajektóriához képesti irányt adjuk meg az x és y ívhossz szerinti deriváltjaként, x'-vel és y'-vel (a fentiek szerint mindkettő $\ll 1$).

Amennyiben kezdetben $(x, y, x', y') = (0, 0, 0, 0)$, akkor a részecske továbbiakban is ugyanilyen koordinátájú helyen marad (a tervezett trajektória definíciója szerint). Ha a fenti vektor $a = (x, y, x', y')$ nem zérus, akkor első közelítésben egy távolabbi helyen az új helyet, $a_{\text{új}}$-at egy lineáris kombinációval kapjuk az a vektorból: $a_{\text{új}} = Ta$ ahol T-t nevezzük az új és eredeti pont közötti rendszer transzfer-mátrixának. Ha két rendszert egymás után helyezünk, akkor a transzfer-mátrixaik nyilvánvalóan összeszorzódnak.

Határozzuk meg a transzfer-mátrixát a következő rendszereknek:

a) Szabad terjedés. A részecske egyenes vonalú pályán halad erőhatás nélkül a vákuum-csőben.

b) Mágneses kvadrupól. Hozzunk létre egy nagyon rövid tartományon (mondjuk meg azt is, hogy milyen közelítésben rövid) kvadrupól-jellegű mágneses teret, melynek tengelye a tervezett trajektória irányába mutat, és ezen engedjük keresztül a részecskét. Mekkora ennek a rendszernek a fókusztávolsága a különböző irányokban (az (x, y) síkban bármely szögben)?

c) Helyezzünk el egymás után egy kvadrupólt, mögé egy adott hosszúságú szabad terjedési szakaszt, majd egy újabb kvadrupólt. Fókuszálhat-e egy ilyen rendszer minden irányban? Mekkora a fókusztávolsága ennek a mágneses lencsének? Mekkora az akromatikus hibája?

d) Milyen lesz a transzfer-mátrixa egy adott hosszúságú homogén mágneses térnek? (Vigyázat: két részecskét párhuzamosan elindítva homogén mágneses térben, a részecskék nem párhuzamosan futnak – tehát a transzfer mátrix nem triviális.)

Hasznos megjegyzés: Tekintve, hogy relativisztikus részecskékre a pálya mágneses térben csak az impulzus nagyságától függ, nemrelativisztikus határesetben végzett számításaink automatikusan helyesek lesznek a relativisztikus esetben is...

(Varga Dezső)

25. Milyen átmérőjűnek tervezzünk egy kezdetben 40 °C-os vörösrézdrótot, hogy 0,5 másodperces és $I = 12\,000$ A-es rövidzárlat során a drót ne melegedjen fel 180 °C-nál nagyobb hőmérsékletre? Vegyük figyelembe, hogy réz fajlagos ellenállásának a T hőmérséklettől való függése: $\varrho(T) = \varrho_0\,(1 + \alpha T)$, ahol ϱ_0 és α ismert állandók.

Tekintsük most a másik szélsőséges esetet, ami egy végtelen vékony, hosszú szupravezető huzal, melyben konstans áram folyik. Tegyük fel, hogy a huzal hőtani adatai teljesen függetlenek a huzal hőmérsékletétől, illetve azt is, hogy a T_0 szupravezetési hőmérséklet fölött a huzal vezetőképessége állandó (ezek a feltevések nyilván távol állnak a valóságtól). Legyen a huzal hőmérséklete kezdetben abszolút zérus, és a környezettel való hőcsere legyen elhanyagolható. Ha a vezeték egy kis részén valamiért hirtelen elveszti szupravezető-képességét, a hőmérséklete nőni kezd. Egy idő után az egész huzal felmelegszik: ez a „quench” jelensége, ami az LHC egyik fő problémaforrása. Milyen gyorsan terjed végig a „quench-hullám” a huzalon? *Útmutatás:* keressük a hőterjedési egyenlet $T(x, t)$ megoldását „haladó hullám” alakjában, azaz $T(x - vt)$ formában!

(Cserti József, Varga Dezső)

26. A kis Luke Skywalker mindennapi házimunkáját végzi Owen bácsikájának kietlen, sivatagos földecskéjén. Napelemeket kell felszerelnie az adott területre úgy, hogy azok teljesen befedjék azt. A fiatal Luke nagyon jól tudja, hogy a Tattooine-t megvilágító két nap milyen távol helyezkedik el bolygójától, és a napok átmérőinek nagyságát is ismeri, valamint műszereivel munkája közben ki tudja mérni az egységnyi felületre percenként eső napenergiát. Felmerül benne a kérdés: vajon ezen adatok alapján meg tudná-e határozni a két nap felszínén uralkodó hőmérsékleteket, ha feltételezi, hogy mindkét nap jó közelítéssel feketetestként sugároz? Ezután elgondolkodik, vajon kell-e ehhez ismernie az egyes csillagok sugárzási entrópiáját egy ismert térfogatra nézve? Éppen arra ólálkodik egy jóságos vuki, aki készséggel segít az ifjú Skywalkernek. Elárulja neki a napok elemi reverzibilis folyamatra vett, a Messzi-messzi galaxis térfogatára kiterjedő sugárzási entrópiáinak hányadosát. Segítsünk a siheder jedinek meghatározni ezen adatok ismeretében a Tattooine egyes napjainak felszíni hőmérsékletét és a Galaxis térfogatára számított sugárzási entrópiát! Mekkora volt a vuki által megsúgott hányados?

(Homa Gábor)

27. Tegyük fel, hogy az LHC részecskegyorsítóban keletkezik egy semleges stabil fekete lyuk, melynek tömege 2 TeV, és a Földhöz képest kezdetben nyugalomban van. Mi történik? Kezeljük a fekete lyukat klasszikus objektumként, melyre csak a gravitáció hat! Milyen mozgást fog végezni? Hogyan változik a lyuk tömege az időben?

(Magyarra fordította Katz Sándor)

(Christian Hölbling)

28. Szálak polimerizációja oldatban a legegyszerűbben úgy jellemezhető, hogy (a méretű és c koncentrációjú) monomerek csatlakoznak egymás után egy növekvő szál végéhez k_{on} másodrendű sebességi állandóval, ill. válnak le onnan k_{off} elsőrendű sebességi állandóval. A szálnövekedés lelassítható ellenerő alkalmazásával oly módon, hogy egy kis méretű súrlódásmentes objektumot F erővel nyomunk szembe a növekvő véggel. Feltéve, hogy a szál mozdíthatatlan (le van rögzítve, vagy nagyon nagy a súrlódási együtthatója), és mindvégig egyenes marad (nem hajlik ki), határozzuk meg azt az F_{stall} ellenerőt, amely a növekedés megállításához szükséges, valamint a növekedési sebességnek az ellenerőtől és a monomerek koncentrációjától való függését!

(Derényi Imre)

29. Egydimenziós stacionárius kvantummechanikai problémák vizsgálatának jól bevált eszköze a transzfer-mátrix módszer. Tekintsünk egy folytonosan változó $V(x)$ potenciálban terjedő

$$\psi(x,t) = \phi(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

hullámfüggvényt, és közelítsük a potenciált kicsiny Δx szakaszokon állandó értékű lépcsőfüggvénnyel! Számítsuk ki a transzfer-mátrix módszer segítségével a hullámfüggvény jobbra és balra terjedő komponenseinek változását egy Δx intervallumon! Vizsgáljuk meg a $\Delta x \to 0$ határesetet, és vezessük le a hullámfüggvény két komponensére vonatkozó differenciálegyenlet-rendszert! Milyen közös alakú differenciálegyenletet elégít ki külön-külön a hullámfüggvény két komponense?

(Dávid Gyula)

30. Aladár és Béla a müonbomlásról vitatkoznak. Abban egyetértenek, hogy a müon elektronra, müon-neutrinóra és elektron-antineutrinóra bomlik. A vita tárgya a kirepülő elektron szögeloszlása. Aladár azt hallotta valahol (sajnos a pontos forrásra nem emlékszik), hogy a kirepülő elektron szögeloszlása nem izotróp, hanem a müon spinjével kapcsolatos. Még arra is emlékszik, hogy az eloszlás az elektron repülési iránya és a müon spinje által bezárt θ szög koszinuszától függ, $a + b\cos(\theta)$ alakban. Béla szerint ez lehetetlen. Érvelése meglehetősen egyszerű: Vegyünk sok müont véletlenszerű spinekkel. Ekkor kb. a müonok felének felfelé, másik felének lefelé fog állni a spinje. A kirepülő elektronok felének eloszlása $\cos(\theta)$ másik fele $\cos(\pi - \theta)$ tagot tartalmaz. Az ezekből adódó teljes eloszlás azonban nem lesz izotróp. Ez viszont nem lehetséges, hiszen kezdetben nem tüntettünk ki egyetlen irányt sem. Segítsünk eldönteni a vitát. Lehet-e $a + b\cos(\theta)$ alakú az elektron eloszlásfüggvénye, vagy rosszul emlékezett Aladár? Hogy kapunk izotróp eloszlást egy sok müonból álló gáz bomlása esetén?

(Katz Sándor)

31. Csapdázott Bose-kondenzált gázok kis frekvenciás gerjesztéseinek ω frekvenciája megkapható az

$$\omega^2 f = -\frac{1}{m}\nabla\left[(\mu - V(\mathbf{r}))\,\nabla f\right] \tag{1}$$

sajátértékegyenlet megoldásából (az m tömeg és a μ kémiai potenciál adott). Jelölje ρ, z, φ a szokásos hengerkoordinátákat, $V(\mathbf{r})$ pedig a kísérletekben gyakran alkalmazott tengelyszimmetrikus harmonikus oszcillátorpotenciált:

$$V(\mathbf{r}) = m\omega_\perp^2\rho^2/2 + m\omega_z^2 z^2/2.$$

Vezessük be a következő paramétereket: $a = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_\perp^2}}$, $b = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_z^2}}$ és $c = \sqrt{\frac{\mu}{m}}$.

a) Mutassuk meg, hogy az (1) egyenletnek megoldásai a következő alakú f módusfüggvények:

$$f = \rho^{|m|}e^{im\varphi}z^\alpha \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{\rho^2}{a^2+\Theta_i} - \frac{z^2}{b^2+\Theta_i}\right), \tag{2}$$

ahol n, m egész, $\alpha \in \{0,1\}$.

b) Hogyan fejezhető ki ω^2 az m, n, és α kvantumszámokkal, valamint az a, b, c és a Θ_i paraméterekkel?

c) Milyen (közönséges, algebrai) egyenletrendszert kell kielégítenie a Θ_i paramétereknek, hogy a (2) alak az (1) egyenlet megoldása legyen?

(Csordás András)

32. Egy R sugarú, gömb alakú gránittömb kis mennyiségben uránt is tartalmaz, homogén eloszlásban. Az urán radioaktív bomlási sorában szerepel a rádium (Ra), valamint ennek leányeleme, a radon (Rn) is. A radon felezési ideje 3.8 nap. A radon leányelemeinek ehhez az értékhez képest nagyon kicsi, őseinek viszont nagyon nagy a felezési ideje. A gömb teljes rádium- és radon-aktivitása (A_{Ra} és A_{Rn}) gamma-sugárzásuk észlelésével jól mérhető. Radioaktiv egyensúlyban $A_{Ra} = A_{Rn}$ lenne, de a gáznemű radon egy része még a bomlása előtt kidiffundál a gömbből, emiatt az aktivitások aránya: $\alpha = A_{Rn}/A_{Ra} < 1$. Gamma-detektorunkkal meghatározzuk az α arány értékét. Számítsuk ki ennek ismeretében a radon D diffúziós állandóját! Mekkora D értéke, ha $\alpha = 0.1, 0.5, 0.9$?

(Veres Gábor)

33. Egy feltételezett (idealizált) szupernova-robbanás során $t = 2s$ alatt időben exponenciálisan lecsengő neutronfluxus halad át a tér egy adott tartományán, ahol a kezdeti időpontban N darab ^{101}Nb (nióbium) atommag található, ^{102}Nb atommag viszont egy sem. A neutronfluxus a kezdeti értékéről a $2s$ alatt az egyharmadára esik le. A neutronfluxus hatására a tartományban levő atommagok átalakulnak, így a ^{101}Nb magok egy részéből neutronbefogással ^{102}Nb lesz. Az átlagos neutronbefogási hatáskeresztmetszetet akkora, hogy a kezdeti időpillanatban a másodpercenkénti befogások száma éppen $N/11$. A ^{102}Nb atommagokból érdekes módon kétféle keletkezik. Egy részük alapállapotban, a másik egy ún. n izomér (hosszú felezési idejű gerjesztett) állapotban jön létre (a többi gerjesztett állapot keletkezését elhanyagoljuk). Az izomér állapotban keletkezés valószínűsége 30%. Ebből az állapotból gamma-foton kibocsátásával a mag alapállapota keletkezik.

A ^{102}Nb mag alapállapotának felezési ideje $4.3\,s$, a metastabil állapoté $1.3\,s$, a ^{101}Nb mag felezési ideje $7.1\,s$. Számítsuk ki, hogyan változik a ^{102}Nb atommagok száma a vizsgált $2s$ alatt!

(Horváth Ákos)

34. Fel szeretnénk fedezni egy jelenséget; arra vagyunk kíváncsiak, hogy statisztikusan mennyire lehetünk biztosak abban, hogy a jelenség bekövetkezett. Más szóval: szeretnénk tudni, mi annak a (kicsi) valószínűsége, hogy valami érdekeset látunk, holott valójában nem történt semmi. Legyen konkrétan olyan a módszer, hogy számláljuk a jelenség bekövetkezését: tegyük fel hogy M esetben figyeltük meg. A jelenség bekövetkezhet „egyéb" okokból is, nevezzük ezt háttérnek (pl. téves mérési adatok, vagy a körülmények összejátszása miatt stb.). Legyen a háttér-események száma N, és tegyük fel, hogy külső információk alapján nagyon pontosan ismerjük N várható értékét.

Az adott esetben tehát M eseményt mértünk, a háttér N. Az N változó eloszlása Poisson típusú (de a továbbiakban közelíthető Gauss-eloszlással). N hibája (szórása) $\sqrt{N}$. A pozitívnak tekintett eredmények M száma akkor elegendően nagy, ha az N háttérnél a szórás bizonyos többszörösével nagyobb: $M > N + s_0\sqrt{N}$, itt s_0 a „szignifikanciát" jelzi. Ez meghatározza annak a $p(s_0)$ valószínűségét, hogy M legalább $N + s_0\sqrt{N}$ akkor, ha csak háttér van, extra jelenség nincs. Pl. az $s_0 = 5$ értékhez $p(5) \approx 5.5 \cdot 10^{-7}$ valószínűség tartozik. Ha tehát M nagyobb a fenti értéknél, akkor $1 - p(s_0)$ valószínűséggel „fedeztük fel", hogy bekövetkezik a jelenség, és csak $p(s_0)$ annak a valószínűsége, hogy tévedünk. Ezt az értéket gyakran hívják „öt szigma" szignifikanciának, és ez a „felfedezés" általánosan elfogadott szignifikancia-határa.

Az eddigi, sokaknak jól ismert tények előrebocsátása után tekintsük a következő esetet: nem egyetlen fajta mérési eredményünk van, hanem valamilyen paraméter függvényében mérünk (pl. felfedezendő részecske tömege, földönkívüli rádiójelek frekvenciája stb.). A paraméterek függvényében az adatokat tartományokra (binekre) osztjuk (hisztogramot készítünk), és ezekben határozzuk meg az egyes M_i bekövetkezési számokat. Legyen K darab tartományunk az i-vel indexelt paraméter függvényében. Minden tartományban lesz egy ismert átlagos háttér. Ezúttal nem tudjuk, hol van az érdekes jelenség: ezért azt keressük, hogy van-e bárhol kiugró érték a mért adatok között. Azaz bármelyik i-re keresünk olyan M_i-t, ami „eléggé" nagyobb, mint N_i.

Tegyünk két egyszerűsítő feltevést: legyen N_i várható értéke i-től független (jelöljük N-nel), és tételezzük fel, hogy ha van „felfedezhető" részecske, akkor az bárhol lehet (azaz bármely i-nél), de csak pontosan egyetlen mérési pontban találhatunk rá. Tekintsük tehát M-nek a legnagyobb mért M_i-t. Akkor „fedeztünk fel" valamit, ha $M > N + s_1\sqrt{N}$.

a) Mekkora legyen s_1 értéke, ha azt szeretnénk, hogy csak statisztikus háttér mellett (extra részecske nélkül) $p(s_0)$ legyen a valószínűsége a fenti egyenlőtlenség teljesülésének? Írjuk fel az s_1 és s_0 közötti összefüggést (ami természetesen K-tól függ)!

b) Van olyan lelkes fizikus, aki a mérés elvégzése után sem elégedett: „pontosítani" akarja a felfedezést, persze tökéletesen becsületes módszerekkel. Ehhez jó érveket keresve *válogat* az adatokból: kiveszi a „pontatlanokat", a „hibásakat" (pl. kisebb volt a háttér, vagy pontatlanabbak voltak a műszerek a mérések egy részében), de teszi ezt (tudat alatt) azon az alapon, hogy vajon az eldobott adatok nélkül jobb-e a jel: megnézi, és ha nem jobb, akkor nem veszi ki azokat (mert mégsem volt jó ezen az alapon válogatni, gondolja), és más feltételek alapján válogat tovább.

Modellezzük a fenti esetet a következőképpen: a méréseket bontsuk véletlenszerűen két részre (minden egyedi mérés 50 % eséllyel kerül egyik vagy másik halmazba). Ekkor az N_i' háttér várható értéke (mindkét mérésben) $N/2$. A két mérés közül válasszuk ki azt, ahol az új legnagyobb érték, M' a nagyobb. Ebben az esetben is definiálhatjuk az s_2 szignifikanciát: azaz, amikor $M' > N/2 + s_2\sqrt{N/2}$. Mekkora legyen s_2, hogy csak háttér mellett $p(s_0)$ valószínűséggel kapjunk legalább ekkora M'-t?

Megjegyzés: A b) pontban említett, jóindulatú „adatválogatást" nehéz tettenérni, és leginkább csak évekkel később derül ki, hogy az adatok tévesek voltak. Erre jó példa a „*Felhasadt A2 rezonancia*" esete 1967-ből. A Phys.Lett.**25B**(1967)44. cikkben közölt eredmények alapján 5 szigma szignifikanciával figyelték meg a jelenséget (egy rezonanciagörbe két csúcsra hasadását), de később bebizonyosodott, hogy csak statisztikus fluktuációról volt szó. Ebben az esetben a mérési pontosság érve alapján (ld. a cikk 2. ábráját) dobták el az adatoknak azt a felét, ahol nem tapasztaltak felhasadást. Érdekesség: a jelenség felfedezését hamarosan két másik független kísérlet is megerősítette, még mielőtt bebizonyosodott a tévedés (ld. Phys.Lett.**B31**(1970)397.).

(Varga Dezső)

35. A T_0 hőmérsékletű háttérsugárzás által egyenletesen betöltött világűrben M_0 tömegű fekete lyuk úszik. Folyamatosan nyeli el a háttérsugárzás fotonjait, ugyanakkor Hawking-sugárzást is kibocsát. (Az utóbbi olyan termikus, azaz Planck-spektrumú elektromágneses sugárzás, melynek jellemző hőmérséklete a fekete lyuk tömegével fordítva arányos.) Írjuk fel a fekete lyuk tömegének időbeli változására vonatkozó differenciálegyenletet! Eközben vegyük figyelembe azt is, hogy a háttérsugárzás hőmérséklete az Univerzum életkorával fordított arányban csökken! Oldjuk meg a differenciálegyenletet abban a két határesetben, amikor a fekete lyukra jellemző hőmérséklet
a) sokkal kisebb; b) sokkal nagyobb a háttérsugárzás hőmérsékleténél! Mikor és hogyan történik az átcsapás a két határeset között? Dolgozzunk realisztikus adatokkal! (Javaslat: a számítás során használjunk Planck-egységeket!)

(Dávid Gyula)

36. „Megyen már a Hajnalcsillag lefelé...” – mondja a közismert magyar népdal. Sokáig senkinek sem tűnt fel, hogy az állítás csillagászati nonszenszː amikor az Esthajnalcsillag, azaz a Vénusz éppen Hajnalcsillagként szerepel, nem lefelé, hanem éppenséggel felfelé megyen (egészen addig, amíg el nem tűnik az időközben felkelő Nap sugaraiban). Amikor meg lefelé megyen, hát éppen este van, és a Vénusz Esti csillagként tündököl.

Amikor néhány lelkes csillagász egy átmeteorozott és átitalozott, no meg végignótázott éjszaka után rádöbbent a fenti ellentmondásra, hamar túltették magukat rajta, mondván, hogy ez csak a hajdani népi énekesek pocsék természetmegfigyelő képességéről tanuskodik.

Nemrég megjelent azonban egy cikk a Kilencfordulatú DNS-ű Turulmadár című etnografológiai folyóiratban, ahol a szerzők, Táltos Tamás és Sámán Sándor a fent idézett népdalt éppenséggel az éles szemű hajdani szemtanúk helyes természetleírása tanúbizonyságának, egyben saját korábban publikált elméletük mellett szóló, szó szerint fényes bizonyítéknak tekintik. Szerintük ugyanis az emberiség – de legalábbis a magyar része – nem a Földről, hanem a Szíriusz csillag egyik bolygójáról származik. A népdal szövege ennek a szenzációs teóriának első kézzelfogható, ám hiteles csillagászati bizonyítékául szolgálhat.

A biológiai tények (pl. az emberiség vastag szőrzetének feltűnő hiánya stb.) arra utalnak, hogy a feltételezett Ősföldön a hőmérséklet nagyjából megegyezett a mai Földön megszokottal. A légkör összetétele és sűrűsége sem üthetett el túlságosan a jelenlegitől. A szerzők más forrásokból viszont arra következtettek, hogy ott és akkoriban egy nap nem 24, hanem 42 óráig tartott (mi más is lehetne a Válasz?). Egyéb konkrét információ nem nagyon áll rendelkezésünkre.

A szerzők hangsúlyozzák, hogy nem tekinthető Hajnalcsillagnak egy olyan – természetes vagy mesterséges – objektum, mint pl. a Mars Phobos nevű holdja, amely anyabolygója tengelyforgási idejénél gyorsabban keringve nyugaton kel, és keleten nyugszik. Ez ugyanis már jóval hajnal előtt, az éjszakai égbolton is látható, amint átszeli az eget. Az igazi Hajnalcsillag nem sokkal hajnal előtt kel fel, aztán – amint a népdal mondja –, meggondolja magát, és ugyanott lemegyen.

Sajnos a cikk szerzői csillagászati ismereteinek hiányosságai (vagy egyszerűen a terjedelem korlátai) nem tették lehetővé, hogy ezt az érdekfeszítő témát részletesebben kifejtsék. Segítsünk tehát mi a táltosnak és a sámánnak! Vázoljuk fel az emberiség ősi hazájának, a Szíriusz naprendszerének szerkezetét, legalábbis néhány fontos vonását! Számítsuk ki emellett, milyen magasra hághatott, és mennyi ideig volt látható az a bizonyos eredeti Hajnalcsillag, mielőtt lemene a hajnal sugaraiban!

(Dávid Gyula)

\end{document}